فرمول تبدیلات لاپلاس $L[f(x)] = f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$

مثال : لاپلاس تابع $f(x) = 1$ را در فاصله $0 + \infty$ محاسبه کنید

$$f(x) = 1$$

$$L[f(x)] = f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$$

$$L[1] \int_0^\infty e^{-sx} dx$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-sx}\Big|_0^\infty = \left(-\frac{1}{s} e^{-s(\infty)}\right) - \left(-\frac{1}{s}\cancel{e^{-s(0)}}\right)$$

$$e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$L[1] = \int_0^\infty e^{-sx}\, dx = \frac{1}{s}$$

ویژگیهای تبدیلات لاپلاس:

1- لاپلاس مجموع، برابر است با مجموع لاپلاسها

1)$L[f(x) \pm g(x)] = L[f(x)] \pm L[g(x)]$

2- لاپلاس مضرب یک تابع مساوی است با مضرب آن تابع

2)$L[\ltimes f(x)] = \ltimes L[f(x)]$

3- تاخیر زمانی

3)$L[e^{ax} f(x)] = f(s-a)$

$L[1] = \frac{1}{s}$

$L[e^{3x}] = \frac{1}{s-3}$

4)$L[xf(x)] = -f'(s)$

5)$L[x^n f(x)] = (-1)^n f^{(n)}(s)$

فرمولهای تبدیلات لاپلاس :

1) $L[1] = \frac{1}{s}$

2) $L[x] = \frac{1}{s^2}$

3) $L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

4) $L[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$

5) $L[sinax] = \frac{a}{s^2+a^2}$

6) $L[cosax] = \frac{s}{s^2+a^2}$

7) $L[sinhax] = \frac{a}{s^2-a^2}$

8) $L[coshax] = \frac{s}{s^2-a^2}$

مثال : عبارت زیر را محاسبه کنید

1) $L[5+3x]$

$= L[5]+L[3x]$

$= 5L[1]+3L[x]$

$= \frac{5}{s}+\frac{3}{s^2}$

2) $L[2e^{4x}+2\sin 3x-7x^2]$

$= \frac{2}{s-4}+2\frac{3}{s^2+9}-7\frac{2!}{s^3}$

$= \frac{2}{s-4}+2\frac{6}{s^2+9}-\frac{14}{s^3}$

3) $L(e^{-2x}+4x^3-7]$

$L[e^{-2x}]+4L[x^3]-7L[1]$

$= \frac{1}{s+2}+4\frac{3!}{s^{3+1}}-\frac{7}{s}$

$\frac{1}{s-2}+\frac{24}{s^4}-\frac{7}{s}$

4) $L(3\cos(-2x)+4\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)+e^{3x}cos3x]$

$= \frac{3s}{s^2+4}+4\frac{-\frac{1}{2}}{s^2+\frac{1}{4}}+\frac{s-3}{(s-3)^2+9}$

5) $L[xsin2x+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}sinh2x+4x^2]$

$= \frac{4s}{(s^2+4)^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{(s-\frac{1}{2})^2-4}+4\frac{2!}{s^3}$

لاپلاس Sin

$f(s)\frac{2}{s^2+4}$

$f(s)=\frac{(s^2+4)-2s(2)}{(s^2+4)^2}=\frac{4s}{(s^2+4)^2}$

6) $L[3xcosh2x+4e^{-2x}\sinh\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}e^{-2x}+7x^5]$

$= \frac{3(s^2+4)}{(s^2-4)^2}+\frac{2}{(s+2)^2-\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{s+2}+7\frac{5!}{s^6}$

7) $\frac{s}{s^2-4}=f(s)$

$\frac{\frac{1}{2}}{s^2-\frac{1}{2}}$

$f'(s)=\frac{1(s^2-4)-2s(s)}{(s^2-)^2}=\frac{-s^2-4}{(s^2-4)^2}=-\frac{s^2+4}{(s^2-4)^2}$

تمرین

1) $L[4\cos^2 x - 4\sin x.\cos x - \frac{1}{2}]$ 2) $L[2(1-\cos x)\sin - \frac{1}{4}\sin^4 x + \frac{1}{7}x]$

3) $L[\sqrt[8]{x^4} - \frac{1}{4}\sin\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sinh\frac{x}{2}]$

راهنما
$\cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

معکوس تبدیلات لاپلاس:

فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد که در فاصله $+\infty$ و 0 تعریف شده باشد و دارای تبدیلات لاپلاس بصورت $L[f(x)] = F(s)$ باشد در این صورت میتوان نوشت $L^{-1}[F(s)] = f(x)$ که در آن $f(x)$ را وارون تبدیلات لاپلاس $f(s)$ می نامند

F (x)=y

ویژگی های تبدیلات لاپلاس:

1) $L^{-1}[F(s) \pm G(s)] = L^{-1}[F(s)] \pm L^{-1}[G(s)$

2) $L^{-1}[\ltimes F(s)] = \ltimes L^{-1}[F(s)](\ltimes \in)$

3) $L^{-1}[F(s-a)] = e^{ax}f(x)$

....

جلسه نهم 93/03/08

$L[1] = \frac{1}{s}$ معکوس ، $L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$

مثال : عبارت زیر را محاسبه کنید

1) $L^{-1}\left[\frac{5}{s} - \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s-4}\right]$

$= L^{-1}[\frac{5}{s}] - L^{-1}\left[\frac{3}{s^2}\right] + L^{-1}[\frac{2}{s-4}]$

$= 5L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - 3L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + 2L^{-1}\left[\frac{1}{s-4}\right]$

$= 5 - 3x + 2e^{4x}$

3) $L^{-1}[\frac{4s}{s^2+9} - \frac{12}{s^2-16} + \frac{8s}{s^2-25}]$

$= 4\cos 3x - 3\sinh 4x + 8\cosh 5x$

3)$L^{-1}[\frac{4}{s^3}-\frac{48}{s^5}+\frac{7}{s+3}]$

$= 2L^{-1}\left[\frac{2}{s^3}\right]-2L^{-1}\left[\frac{4!}{s^5}\right]+7L^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right]$

$2x^2-2x^4+7e^{-3x}$

4)$L^{-1}[\frac{5}{s^2-25}+\frac{4(s-2)}{(s-2)^2-9}+\frac{24}{(s-7)^5}]$

$sinh5x+4e^{2x}cosh3x+e^{7x}x^4$

5)$L^{-1}[\frac{24}{(s+4)^2+36}-\frac{6}{(s-4)^3}+\frac{2s-2}{(s-1)^2+64}]$

$= 4e^{-4x}sin6x-3e^{4x}x^2+2e^{x}cos8x$

6) $L^{-1}[\frac{5}{s^2+4s+5}]$ مهم

$= L^{-1}[s^2+4s+4+1]$

$L^{-1}[\frac{5}{(s-2)^2+1}]$

$= 5e^{-2x}sinx$

تمرین:عبارت زیر را محاسبه کنید

1)$L^{-1}\left[\frac{3}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{7}{s+\frac{1}{2}}\right]$

2)$L^{-1}\left[\frac{s}{s^2-36}+\frac{3s}{2s^2+72}+\frac{24}{(s-3)^4}\right]$

3)$L^{-1}\left[\frac{5}{7s-14}+\frac{2s-6}{s^2-6s+13}+\frac{5s}{s^2+49}\right]$

4)$\frac{24}{(s+3)^2-4}-\frac{48}{3(s+5)^5}+\frac{1}{2(s+\frac{4}{5}}]$

نکته:همواره داریم

$1) L[y'] = sL[y] - y(0)$ ، $2) L[y''] = s^2L[y] - sy(0) - y'(0)$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط داده شده توسط تبدیلات لاپلاس بدست آورید.

$y' + y = e^x \qquad y(0) = 1$

$L[y' - y] = L[e^x]$

$L[y'] + L[y] = \frac{1}{s-1}$

$sL[y] - y(0) + L[y] = \frac{1}{s-1}$

$(s+1)L(y] - 1 = \frac{1}{s-1}$

$\Rightarrow (s+1)L[y] = \frac{1}{s-1} + 1 = \frac{s}{s-1}$

$\Rightarrow L[y] = \frac{s}{(s-1)(s+1)} = \frac{s}{s^2-1}$

$\Rightarrow y = L^{-1}[\frac{s}{s^2-1}]$

$= coshx$

$\frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$= \frac{e^x-e^{-x}+e^x}{2}e^{-x} = \frac{2e^x}{2} = e^x$

تمرین : معادله دیفرانسیل زیر را با شرایط داده شده توسط تبدیلات لاپلاس بدست آورید

1) $y' - 2 = 1 \qquad y(0) = 1$

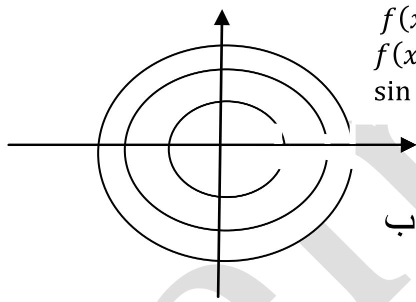
2) $y' + y = e^x \qquad y(0) = 0$

جلسه دهم 93/03/09

سری های فوریه

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Sin}(0) = 0 \\ \sin(0 + 2\pi) = 0 \\ \mathrm{Sin}(0 + 4\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

هر عدد زوجی
که بهsinها اضافه
شود مساوی با صفر است



$f(x) = 0$
$f(x - 4) = 0$
تابع sin
$= 0$

تابع sin تابع متناوب

تعریف : میگوییم تابع f متناوب است هر گاه داشته باشیم$f(x + T) = f(x)$ و کمترین مقداری که بجای T قرار داده بطوری که تساوی فوق برقرار باشد را دوره ی تناوب تابع $f(x)$ می نامند. بطور مثال : تابع sin یک تابع متناوب می باشد و دوره متناوب آن برابر با 2π خواهد بود

نکته 1 : اگر x منفی شود تابع فرد است . و اگر x مثبت شود تابع زوج است

$$\boldsymbol{f(x + L) = f(x) = 2L}$$

تعریف سری های فوریه : فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد که در فاصله $[-L$ و $L]$ تعریف شده باشد و در خارج از این فاصله داشته باشد $f(x + 2L) = f(x)$ در این صورت سری فوریه یا بسط فوریه تابع $f(x)$ را بصورت زیر تعریف میکند

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + [\sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L})}$$ **فرمول سری فوریه**

در این عبارت a_0 و b_n و a_n ضرایب سری فوریه را تابع مورد نظر می نامند که هر کدام از آن ها بصورت زیر تعریف میگردند

سری فوریه یعنی حاصل جمع توابع

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}dx}$$

مثال : سری فوریه تابع متناوب $f(x) = x$ را با شرایط زیر بدست آورید

$f(x) = x$ و $-\pi < x < \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{a_0}{2} + [_{n=1}^{\infty}(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L})}$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}(\frac{x^2}{2}|_{-\pi}^{\pi})$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{-\pi^2}{2}\right) = 0 \qquad a_0 = 0$$

+	مشتق	انتگرال
-	x	$cosnx$
	1	$\frac{1}{n}sinnx$
	0	$-\frac{1}{n^2}cosnx$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xcosnx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(xnsinnx + \frac{1}{n^2}cosnx|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}sinn\pi + \frac{1}{n^2}cosn\pi\right) - (\frac{1}{n}\sin(-n\pi) + \frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}cosn\pi - \frac{1}{n^2}cosn\pi\right) = 0 \qquad a_n = 0$$

مشتق	انتگرال
x	$sinnx$
1	$-\frac{1}{n}cosnx$
0	$-\frac{1}{n^2}sinnx$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xsinnx\, dx = \frac{1}{\pi}[\left(-\frac{x}{n}cosnx + \frac{1}{n^2}sinx\right)|_{-\pi}^{\pi}]$$

$$\frac{1}{\pi}[\left(-\frac{\pi}{n}cosn\pi + \frac{\pi}{n^2}sinn\pi\right) - (\frac{\pi}{n}cos(-n\pi) + \frac{\pi}{n^2}\sin(-n\pi)]$$

$$\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}cosn - \frac{\pi}{n}cosn\pi\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}cosn\pi\right)$$

$$= \frac{-2}{n}cosn\pi = \frac{-2}{n}(-1)^n = (\frac{2}{n})(-1)^{n+1} \qquad b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

تمرین سری فوریه توابع زیر را باشرایط داده شده بدست آورید

1)$f(x) = 1 + x$ و $-\pi < x < \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$

2)$f(x) = -x$ و $-L < x < L$ و $f(x + 2L)f(x)$

3)$f(x) = e^x$ و $-\pi \leq x \leq \pi$ و $f(x + 2\pi) = f(x)$

ویژگی های سری فوریه:

1) سری فوریه تابع منحصرا" به فرداست

2)هیچگاه $f(x)$ دارای سری فوریه ای باضرایب ثابت $a_0 a_n b_n$ باشد آنگاه ضرایب سری فوریه مربوط به تابع $Cf(x)$ عبارت از Cb_n و Ca_n و Ca_0 و $Cf(x)$

3)هر گاه ضرایب سری فوریه مربوط به تابع $f(x)$ بصورت $a_0 a_n b_n$ و ضرایب سری فوریه مربوط به تابع $g(x)$ بصورت b'_n و a'_n و a'_0 باشند آنگاه ضرایب سری فوریه تابع $f(x) + g(x)$ عبارت ست از $a_0 + a'_0$ و $a_n + a'_n$ و $b_n + b'_n$